



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова» (РИИ АлтГУ)

А.Г.ЛЕБЕДЕВ

ЛЕКЦИИ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

(Обыкновенные дифференциальные уравнения)

Учебное пособие для студентов
направления «Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2016

УДК 681.3

Лебедев А.Г. Лекции по численным методам: Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие для студентов направления «Информатика и вычислительная техника» – Изд. 3-е. / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2016. – 52 с.

Рассмотрены основные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Учебное пособие предназначено для студентов направления «Информатика и вычислительная техника», а также студентов и аспирантов других специальностей и интересующихся применением численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрено и одобрено на
заседании кафедры ПМ
Рубцовского индустриального
института
Протокол № 5 от 20.01.2016 г.

Рецензент: доцент каф. высш. матем., физ. и хим., к.ф.-м.н
Г.А. Обухова

© Рубцовский индустриальный институт, 2001
© Рубцовский индустриальный институт, 2010
© Рубцовский индустриальный институт, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Простейшие приближенные методы решения дифференциальных уравнений.
 - 1.1. Группы методов решения дифференциальных уравнений.
 - 1.2. Интегрирование ОДУ с помощью степенных рядов.
 - 1.3. Метод последовательных приближений.
 - 1.4. Численное интегрирование методом последовательных приближений.
2. Численные методы решения задачи Коши.
 - 2.1. Метод Эйлера численного решения ОДУ.
 - 2.2. Метод Рунге-Кутты.
 - 2.3. Метод Адамса.
 - 2.4. Метод Милна.
3. Численные методы решения краевых задач ОДУ.
 - 3.1. Сведение линейной двухточечной краевой задачи к задачам Коши.
 - 3.2. Метод конечных разностей.
 - 3.3. Метод прогонки.
 - 3.4. Метод стрельбы для решения краевых задач.
4. Вариационные методы решения задач ОДУ.
 - 4.1. Проекционные методы решения задач ОДУ.
 - 4.2. Метод коллокации.
 - 4.3. Метод Галеркина.
 - 4.4. Метод наименьших квадратов.
5. Аналитические методы приближенного решения задач ОДУ.
 - 5.1. Метод Чаплыгина.
 - 5.2. Метод малого параметра Пуанкаре.

ВВЕДЕНИЕ

С развитием вычислительной техники численные методы стали одним из наиболее эффективных средств решения сложных краевых задач и задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данном учебном пособии рассмотрены основные методы численного анализа обыкновенных дифференциальных уравнений и алгоритмы, позволяющие программно реализовать эти методы в виде вычислительных систем. Даны отдельные рекомендации по программированию этих алгоритмов.

1. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Группы методов решения дифференциальных уравнений

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) является уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \quad (1.1)$$

Задача Коши для этого уравнения заключается в поиске решения, удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области R , определяемой неравенствами:

$$|x - x_0| < a; |y - y_0| < b,$$

то существует решение в окрестности точки x_0 , и оно единственно, если выполнено условие Липшица

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N|\tilde{y} - y|, \quad (1.3)$$

где N - константа Липшица, зависящая в общем случае от a и b .

Нормальная система дифференциальных уравнений 1-го порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В векторной форме

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.5)$$

где $A = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ - заданная вектор-функция правых частей системы.

Решение представляет некоторую линию L (интегральную кривую) в пространстве $E^{n+1} = \{x, y_1, y_2, \dots, y_n\}$, а совокупность всех решений образует поле интегральных кривых.

Если заданы начальные условия в виде вектора

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1^{(0)} \\ \vdots \\ Y_n^{(0)} \end{bmatrix} \text{ в точке } x_0, \text{ то имеем задачу Коши; если задано условие}$$

$$Y|_{x_0} = Y^{(0)}; Y|_{x_1} = Y^{(1)}, \quad (1.6)$$

то это граничная или краевая задача.

Условием существования решения является непрерывность функций f_1, f_2, \dots, f_n в некоторой области $U = [a, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n]$, а единственности - условие Липшица.

$$|f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq N \sum_{j=1}^n |\bar{y}_j - y_j|, \quad (1.7)$$

где N - константа Липшица.

Вместо условия Липшица можно принять ограниченность производной $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$, т.е. за константу Липшица принять:

$$N = \max_{i,j} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|. \quad (1.8)$$

Даже для простых дифференциальных уравнений можно не найти решение регулярным методом. Поэтому создано большое число приближенных методов, которые разделяются на 3 группы:

1. Аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциальных уравнений в виде аналитического выражения, сюда же относятся асимптотические методы. Аналитические методы позволяют исследовать поведение решения при различных значениях аргумента и параметров уравнения.
2. Графические методы, отражающие решение в виде графика.

Численные методы, дающие решение в виде таблицы значений функции в выбранных точках отрезка аргумента.

При формировании краевой задачи следует учитывать, что она может иметь 4 модификации.

1 *краевая задача* - если заданы значения функции - решения в граничных точках отрезка:

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

2 *краевая задача* - когда заданы значения производных в граничных точках:

$$y'(a) = \bar{y}_a; y'(b) = \bar{y}_b.$$

3 *краевая задача* – в ней задаются линейные соотношения между значениями функций и их производных в граничных точках:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta.$$

Периодическая задача, которая характерна условием:

$$y(a) = y(b); y'(a) = y'(b),$$

при этом отрезок $[a, b]$ является периодом функции y .

При решении задачи Коши численными методами возможны две группы методов.

1. Одношаговые методы, в которых для нахождения следующей точки кривой $y(x)$ требуется информация лишь об одном предыдущем шаге.
2. Многошаговые методы, в которых для отыскания следующей точки кривой $y(x)$ требуется информация более чем об одной из предыдущих точек.

Чтобы получить достаточно точное числовое значение, прибегают к итерации, уточнению значения функции, так организованы методы прогноза и коррекции.

1.2. Интегрирование ОДУ с помощью степенных рядов

Рассматривается уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) \quad (1.9)$$

при начальных условиях:

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_0'; \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.10)$$

Такое уравнение можно свести к системе уравнений первого порядка.

Предположим, что правая часть уравнения (1.9) является аналитической функцией в начальной точке, т.е. разлагается в степенной ряд вида

$$f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} (x - x_0)^{\alpha_0} (y - y_0)^{\alpha_1} \dots (y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)})^{\alpha_n},$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ - целые неотрицательные числа.

Тогда, как доказывается в математическом анализе, интеграл уравнения (1.9) также является аналитической функцией и его можно представить рядом Тейлора

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (1.11)$$

Первые n+1 коэффициентов определяются из начальных условий (1.10) и уравнения (1.9).

Для нахождения следующих коэффициентов дифференцируется уравнение (1.9) по правилу дифференцирования сложной функции.

ПРИМЕР

Найдем несколько членов разложения в ряд решения уравнения

$$y'' + xy' + y = 0$$

при начальных условиях $y(0)=0; y'(0)=1$.

Решение.

Полагаем решение в виде

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Требуется найти производные в нулевой точке

$y'(0)=1$ - из начальных условий;

$y''=-xy' - y$ - из дифференциального уравнения.

Остальные производные определяются последующим дифференцированием:

$$y''' = -xy'' - 2y',$$

$$y^{IV} = -xy''' - 3y'',$$

$$y^V = -xy^{IV} - 4y''''.$$

Отсюда:

$$y''(0) = 0; y''''(0) = -2 \cdot 1 = -2; y^{IV}(0) = 0; y^V(0) = -4 \cdot (-2) = 8.$$

Решение

$$y(x) = x + x^3/3 + x^5/15 + \dots$$

Сходимость ряда будет зависеть от значения x , т. е. требуется определение радиуса сходимости.

Метод не удобен для использования на ЭВМ, т. к. требует вычисления производных, операции вычисления производных требуют большие затраты памяти и дают значительные погрешности.

Однако этот метод можно применить для определения нулевого приближения при использовании других методов.

1.3. Метод последовательных приближений

Рассмотрим метод для уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (1.12)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.13)$$

Предполагается, что в некоторой точке (x_0, y_0) удовлетворяется условие существования и единственности решения.

Интегрируем правую и левую часть в пределах от x_0 до x , получим

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx,$$

и с учетом начальных условий

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1.14)$$

Получили интегральное уравнение. Для его решения применим метод последовательных приближений, т. е. приближенное решение определяем в виде итерационного процесса

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x_0, y_0) dx,$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx, \quad (1.15)$$

...

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, (n = 1, 2, \dots).$$

Если правая часть $f(x, y)$ определена и непрерывна в $R\{0 \leq x - x_0 \leq a, |y^1 - y_0| \leq b\}$ и выполняется условие Липшица, то, как доказывается в курсе дифференциальных уравнений, последовательные приближения y_n равномерно сходятся к решению (1.12).

Для оценки погрешности на n -м шаге приближения:

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, y_{n-1})] dx \right| \quad (1.16)$$

применим условие Липшица

$$|f(x, y) - f(x, y_{n-1})| \leq N|y(x) - y_{n-1}(x)| \leq N\varepsilon_{n-1}(x). \quad (1.17)$$

Тогда (1.16) примет вид

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x N \varepsilon_{n-1}(x) dx, (n = 1, 2, \dots). \quad (1.18)$$

Применим формулу Лагранжа при $x_0 \leq x \leq x_0+h$, будем иметь

$$\varepsilon_0(x) = |y(x) - y(x_0)| = |x - x_0| |y'(\xi)|,$$

где ξ - средняя точка: $x_0 < \xi < x$.

Если производная ограничена

$$|y'(\xi)| \leq M, \text{ то}$$

$$\varepsilon_0(x) \leq M(x - x_0),$$

$$\varepsilon_1(x) \leq N \int_{x_0}^x \varepsilon_0(x) dx \leq MN \frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

$$\varepsilon_3(x) \leq MN^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!},$$

· · ·

$$\varepsilon_n(x) \leq MN^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (1.19)$$

В качестве начального приближения y_0 можно взять конечный отрезок ряда Тейлора (1.11).

При пользовании этим методом аналитичность правых частей не требуется, т. е. метод можно применить, когда разложения решения ОДУ в степенной ряд невозможны.

Метод последовательных приближений можно распространить на систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y), \quad (1.20)$$

$$Y(x_0) = Y_0. \quad (1.21)$$

Уравнению (1.14) соответствует векторное уравнение

$$Y = Y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y) dx. \quad (1.22)$$

Последовательные приближения в векторной форме:

$$Y^{(p)} = Y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y^{(p-1)}) dx. \quad (1.23)$$

ПРИМЕР

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= x + y_1 y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= x^2 - y_1^2 \end{aligned} \right\}.$$

Начальные условия: $y_1(0) = 1; y_2(0) = 0$.

Строим последовательные приближения при $y_1(0) = 1; y_2(0) = 0$.

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2) dx = 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2^{(1)} = \int_0^x (x^2 + y_1^2) dx = -x + \frac{x^3}{3}.$$

Аналогично можно построить и второе приближение $y_1^{(2)}$ и $y_2^{(2)}$.

Численное интегрирование методом последовательных приближений

Применение метода последовательных приближений осложняется вычислением интегралов. При программировании этого алгоритма используются методы численного интегрирования.

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (1.24)$$

при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.25)$$

Заданный интервал разобьем на участки при выбранном шаге h :

$$x_i = x_0 + ih, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} y_i &= y(x_i); \quad y'_i = f(x_i, y_i), \\ y_i - y_0 &= \int_{x_0}^{x_i} y' dx = h \int_0^i y' dq, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Применим для вычисления интеграла кривой части квадратурную формулу

$$y_i - y_0 = h \sum_{j=0}^m A_j^{(i)} y'_j, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (1.27)$$

Коэффициенты $A_j^{(i)}$ определяются из условия, чтобы формула была точной для полинома степени не выше $m+1$. После замены переменных получаем из (1.26) кубатурные формулы Ньютона-Котеса для разных значений количества точек m разбиения отрезка.

Для $m = 4$ имеем [1]:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= \frac{h}{720} (251 y'_0 + 646 y'_1 - 264 y'_2 + 106 y'_3 - 19 y'_4), \\ y_2 - y_0 &= \frac{h}{90} (29 y'_0 + 124 y'_1 + 24 y'_2 + 4 y'_3 - y'_4), \\ y_3 - y_0 &= \frac{h}{80} (27 y'_0 + 102 y'_1 + 72 y'_2 + 42 y'_3 - 3 y'_4), \\ y_4 - y_0 &= \frac{4h}{90} (7 y'_0 + 32 y'_1 + 12 y'_2 + 32 y'_3 + 7 y'_4). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Последовательные приближения вычисляются по формулам типа (1.27):

$$y_i^{(p+1)} - y_0 = h \sum_{j=0}^m A_j^{(i)} y_j^{(p)}, \quad (1.29)$$

$$\text{где } y_j^{(0)} = f(x_i, y^{(0)}); y^{(0)} = y_0. \quad (1.30)$$

Коэффициенты $A_j^{(i)}$ соответствуют (1.28).

Последовательные подстановки $y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, y_3^{(p)}, y_4^{(p)}$ в правую часть (1.28) дают новое приближение. Производные y_j' вычисляются через $f(x_0, y_j)$.

ПРИМЕР

Найти приближенное решение

$$y' = \text{SIN}(x) + \text{COS}(x); y(0) = 0.$$

Выбираем $h = 0,2$, $m = 4$, т.е. индексы точек: 0, 1, 2, 3, 4.

Тогда точки интервала:

$$x_1=0; x_2=0,2; x_3=0,4; x_4=0,6; x_5=0,8.$$

За начальное приближение принимаем 2 члена разложения в ряд Тейлора:

$$y^{(0)} = y(0) + y'(0)x = x,$$

$$y_i'(0) = f(x_i, y_i^0).$$

Подставим начальное приближение в дифференциальное уравнение

$$y_i'(0) = \text{SIN}(x_i) + \text{COS}(x_i),$$

можем вычислить производные в пяти точках.

Далее применяем формулы (1.28) для вычисления 1-го приближения в четырех точках.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

2.1. Метод Эйлера численного решения ОДУ

Теорема Тейлора служит основным инструментом вывода большинства численных методов решения ОДУ.

Рассматриваем уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.2)$$

Выбираем шаг h и на заданном интервале аргумента построим систему точек

$$x_i = x_0 + ih, \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

В методе Эйлера решение $y(x)$ заменяется ломаной, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Звенья ломаной имеют наклон:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i),$$

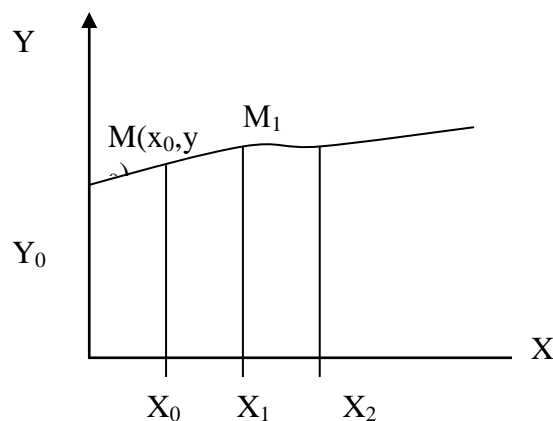
т. е. производную в уравнении (2.1) заменили на приближенное значение.

Тогда в методе Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (2.3)$$

$$\text{где } \Delta y_i = hf(x_i, y_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Это выражение соответствует двум членам разложения решения в ряд Тейлора. Т.е. это метод первого порядка точности. Если $f(x, y)$ непрерывная функция, то можно доказать, что при $h \rightarrow 0$ и малом отрезке (x_0, x_0+h) последовательность Эйлера стремится к интегральной кривой.



Достоинством метода является простота, недостатками - малая точность и систематическое накопление ошибок.

Метод Эйлера является одношаговым методом. Для улучшения метода применяется модификация Эйлера-Коши:

1. Определяется грубое приближение по формулам (2.3) и (2.4)

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf_i, \text{ где} \quad (2.5)$$

$$f_i = f(x_i, y_i).$$

2. Находится среднее значение поля интегральных кривых на этом промежутке

$$\bar{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}), \quad (2.6)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f_i + \bar{f}_{i+1}}{2}.$$

Для оценки погрешности можно применить правило Рунге:

$$|y(x_i) - y_i(h/2)| \leq \frac{|y_i(h) - y_i(h/2)|}{2^{p-1}}, \quad (2.7)$$

где $y(x_i)$ - точное решение в точке x_0 ;

$y_i(h)$ - решение приближенное, вычисленное данным методом с шагом h ;

$y_i(h/2)$ - решение, вычисленное с шагом $h/2$;

p - порядок точности метода (для метода Эйлера равен 1).

2.2. Метод Рунге-Кутты

Рассматривается ОДУ (2.1) с начальными условиями (2.2). В алгоритме метода Рунге-Кутты выбирается шаг h и строится система точек (сетка):

$$x_i = x_0 + ih, \quad (i = 0, 1, 2, \dots); \quad y_i = y(x_i);$$

Определяются коэффициенты Рунге по формулам:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Последовательность значений y в точках заданного интервала определяется:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (2.9)$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

Рассмотренный алгоритм Рунге-Кутты имеет 4-й порядок точности, т.е. он получен разложением в ряд Тейлора до 4-го порядка производных. Для первого промежутка из уравнений (2.1) имеем:

$$y(x_0 + h) - y_0 = \int_{x_0}^{x_0+h} y'(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx. \quad (2.11)$$

Если $f(x, y) = f(x)$, т.е. не зависит от y , то применим формулу Симпсона численного интегрирования, разбив отрезок на два интервала, получим:

$$y(x_0 + h) - y_0 \approx \frac{1}{6} \left[f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h) \right] \quad (2.12)$$

Если перейти к обозначениям (2.8), то формулы (2.12) совпадут с (2.10).

Для улучшения метода можно применить автоматическое изменение шага h .

После вычисления y_{i+1} с шагом h все вычисления повторяются с шагом $h/2$, полученный результат сравнивается с предыдущим. Если

$$|y_{i+1}(h) - y_{i+1}(h/2)| < \varepsilon, \quad (2.13)$$

то вычисления продолжают с шагом h в противном случае шаг берется $h/2$.

На этом построен метод Рунге-Кутты-Мерсона.

Можно распространить метод Рунге-Кутты на систему уравнений.

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$y(x_0) = y_0; z(x_0) = z_0. \quad (2.15)$$

Коэффициенты Рунге вычисляются двух типов: k_j и l_j :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0, z_0) \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} l_1 &= hg(x_0, y_0, z_0) \\ l_2 &= hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right), \\ l_3 &= hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right), \\ l_4 &= hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Для систем ОДУ автоматическое изменение шага применяется в случае, если интегральные кривые сильно различаются крутизной.

Оценку погрешности можно провести по правилу Рунге:

$$|y_i(h/2) - y_i(h)| \leq \frac{16}{15} |y_i(h/2) - y_i(h)|, \quad (2.18)$$

где $y(x_i)$ - точное решение;

$y_i(h)$ - решение с шагом h ;

$y_i(h/2)$ - решение с шагом $h/2$.

Метод Рунге-Кутты относится к одношаговым методам. Чтобы вычислить значение y_{i+1} , требуется знать лишь значение y_i . Это свойство называется "самостартованием".

В основе метода лежит разложение в ряд Тейлора до k -го порядка производных. В инженерных расчетах обычно применяется метод Рунге 4-го порядка, хотя и возможно использование метода 2-го порядка.

Число k называется порядком метода. Погрешность на шаге имеет порядок $k+1$. Все одношаговые методы заменяют вычисления производной значением функции в точке.

ПРИМЕР

Найти решение уравнения $y' = 0,25y^2 + x^2$ на отрезке $[0,9;0,5]$ с шагом $h = 0,1$, $y(0) = -1$.

Решение:

1) Вычисление: $f(x_0, y_0) = 0,25$; $k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,025$.

2) $x_0 + h/2 = 0,05$; $y_0 + k_1^{(0)}/2 = -0,9875$.

Вычисление: $f(x_0 + h/2; y_0 + k_1^{(0)}/2) = 0,24629$.

3) $k_2^{(0)} = hf(x_0 + h/2; y_0 + k_1^{(0)}/2) = 0,024629$,

$x_0 + h/2 = 0,05$; $y_0 + k_2^{(0)}/2 = -0,9876$.

Вычисление: $f(x_0 + h/2; y_0 + k_2^{(0)}/2) = 0,24638$,

$k_3^{(0)} = hf(x_0 + h/2; y_0 + k_2^{(0)}/2) = 0,02464$.

4) $x_0 + h = 0,1$; $y_0 + k_3^{(0)} = -0,97536$,

$f(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}) = 0,25(0,97536)^2 + (0,1)^2 = 0,24783$,

$k_4^{(0)} = 0,02478$.

5) $\Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$,

$\Delta y_0 = 0,02472$.

6) $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -1 + 0,02472 = -0,97528$.

2.3. Метод Адамса

Рассматривается ОДУ вида

$$y' = f(x, y) \quad (2.19)$$

при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.20)$$

Метод Адамса относится к разностным методам и является методом прогноза и коррекции.

Заданный отрезок значений аргумента разбивается на точки с выбранным шагом h :

$$x_i = x_0 + ih, \quad (i = 0, 2, 3, \dots).$$

Из (2.19) следует

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_i+h} y' dx. \quad (2.21)$$

Многоточечные методы этого типа основаны на интерполяции $f(x, y)$ или y' .

Применим вторую интерполяционную формулу Ньютона с точностью до разностей 4-го порядка к y' .

$$y' = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y'_{i-3}, \quad (2.22)$$

где

$$q = \frac{x - x_i}{h}. \quad (2.23)$$

Далее раскрываются скобки в (2.22) и результат подставляется в (2.21), заменяются переменные по (2.23), получим:

$$\Delta y_i = h \int_0^1 \left(y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-3} \right) dq \quad (2.24)$$

После интегрирования получаем 1-ую экстраполяционную формулу Адамса:

$$\Delta y_i = h y'_i + \frac{1}{2} \Delta \left(h y'_{i-1} \right) + \frac{5}{12} \Delta^2 \left(h y'_{i-2} \right) + \frac{3}{8} \Delta^3 \left(h y'_{i-3} \right). \quad (2.25)$$

Для использования формулы необходимо знать начальные 4 значения функции $y_0; y_1; y_2; y_3$. Их можно получить другим методом, например методом Рунге-Кутты. Такие методы называются *многоточечными* или *многошаговыми*.

Интеграционный проход по точкам отрезка выполняется:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \quad (2.26)$$

y_{i+1} экстраполируется на основании четырех значений функции в предыдущих точках.

Полученное значение y_{i+1} уточняется по второй формуле Адамса. Для получения ее применяются тождества для конечных разностей:

$$\begin{aligned}\Delta \overline{y'_{i-1}} &= \Delta \overline{y'_i} - \Delta^2 \overline{y'_{i-1}} \\ \Delta^2 \overline{y'_{i-2}} &= \Delta^2 \overline{y'_{i-1}} - \Delta^3 \overline{y'_{i-2}} \\ \Delta^3 \overline{y'_{i-3}} &\approx \Delta^3 \overline{y'_{i-2}}\end{aligned}\quad (2.27)$$

В (2.25) производится замена по (2.27), получается II формула Адамса коррекции, интерполяционная формула:

$$\Delta y_i = h y'_i + \frac{1}{2} \Delta \overline{y'_i} - \frac{1}{12} \Delta^2 \overline{y'_{i-1}} - \frac{1}{24} \Delta^3 \overline{y'_{i-2}} \quad (2.28)$$

которая по значениям функции $y'_{i-1}; y'_{i-2}; y'_{i-3}; y'_i$ уточняет значение y_i .

Для работы на ЭВМ удобно перейти от конечных разностей $\Delta \overline{y'_i}$ к значениям $h y'_i$.

Тогда формулы Адамса принимают вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \overline{5y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}} \quad (2.29)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \overline{y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2}} \quad (2.30)$$

Метод соответствует разложению в ряд Тейлора с точностью $O(h^5)$.

Погрешность оценивается по правилу Рунге

$$|y \overline{\left[\right]} - y \overline{\left[\right] / 2}| \leq \frac{1}{15} |y \overline{\left[\right] / 2} - y \overline{\left[\right]}| \quad (2.31)$$

где $y \overline{\left[\right] / 2}$ - значение y_i вычисленное с шагом $h/2$;

$y \overline{\left[\right]}$ - соответственно с шагом h ;

$y \overline{\left[\right]}$ - точное значение решения в точке.

2.4. Метод Милна

Рассматривается ОДУ типа (2.19) при начальных условиях (2.20). Метод Милна является также методом прогноза и коррекции. Выбираем шаг h , разбиваем отрезок аргумента узлами интерполяции

$$\begin{aligned}x_i &= x_0 + ih, (i = 0, 1, 2, \dots) \\ y_i &= y(x_i)\end{aligned}$$

Первые 4 значения искомой функции в узлах определяются другим методом, в частности Рунге-Кутты.

Для точки x_k составляется первая интерполяционная формула Ньютона для y' , т.е. интерполяция осуществляется в начале таблицы

$$y' = y'_k + q\Delta y'_k + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y'_k + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y'_k, \quad (2.32)$$

где $q = (x - x_k)/h$,

$$dx = h dq.$$

Интерполируем (2.19) в пределах от x_{i-4} до x_i :

$$\int_{x_{i-4}}^{x_i} y' dx = \int_{x_{i-4}}^{x_i} \left(y'_{i-4} + q\Delta y'_{i-4} + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y'_{i-4} + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y'_{i-4} \right) dx. \quad (2.33)$$

После замены переменных интегрирования получаем:

$$y_i - y_{i-4} = h \left(4y'_{i-4} + 8\Delta y'_{i-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{i-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{i-4} \right). \quad (2.34)$$

Перейдем от конечных разностей к функциям

$$\begin{aligned}\Delta y'_{i-4} &= y'_{i-3} - y'_{i-4}; \\ \Delta^2 y'_{i-4} &= y'_{i-2} - 2y'_{i-3} + y'_{i-4}; \\ \Delta^3 y'_{i-4} &= y'_{i-1} - 3y'_{i-2} + 3y'_{i-3} - y'_{i-4}.\end{aligned} \quad (2.35)$$

В (2.34) сделали замену по (2.35), получили 1-ю формулу Милна

$$y_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3} \left(y'_{i-1} - y'_{i-2} + 2y'_{i-3} \right) \quad (2.36)$$

т.е. первое приближение y_i , полученное экстраполяцией.

Для вывода второй интерполяционной формулы Милна в формуле (2.32) положим $k = i - 2$ и интегрируем (2.19) в пределах x_{i-2} до x_i , заменяя переменные по (2.33):

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} y' dx = h \int_0^2 \left[y'_{i-2} + q\Delta y'_{i-2} + \frac{1}{2}(q^2 - q)\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{1}{6}(q^3 - 3q^2 - 2q)\Delta^3 y'_{i-2} \right] dq. \quad (2.37)$$

После вычисления интегралов и приведения подобных получим

$$y_i - y_{i-2} = h \left(2y'_{i-2} + \frac{1}{3} \Delta^2 y'_{i-2} + 2\Delta y'_{i-2} \right). \quad (2.38)$$

Перейдем от конечных разностей к функциям

$$\begin{aligned} \Delta y'_{i-2} &= y'_{i-1} - y'_{i-2}, \\ \Delta^2 y'_{i-2} &= y'_i - 2y'_{i-1} + y'_{i-2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

После замены (2.39) в формуле (2.38) получим вторую интерполяционную формулу Милна.

$$y_i = y_{i-2} + \frac{h}{3} (y'_i + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}). \quad (2.40)$$

По 4 значениям функций $y_{i-1}; y_{i-2}; y_{i-3}; y_{i-4}$ экстраполируется y_i по первой формуле Милна (2.36), а затем y_i уточняются по формуле коррекции (2.40).

Метод Милна относится к методам 4-го порядка точности. Милн показал, что абсолютная погрешность значения y_i оценивается

$$\varepsilon \approx \frac{1}{29} |y_i^{(2)} - y_i^{(1)}|, \quad (2.41)$$

где $y_i^{(1)}$ - значение функции в узле, вычисленное при экстраполяции (2.36);

$y_i^{(2)}$ - значение функции y_i вычисленное при коррекции (2.40).

Если ε получается меньше заданной точности, то шаг h сохраняется при переходе к следующему узлу, в противном случае берется $h/2$.

Метод Милна не обладает устойчивостью, т.е. погрешность при переходе от точки к точке может расти экстраполяционно. Поэтому его применяют при небольшом количестве шагов.

Рассмотренные методы прогноза и коррекции не являются самостартующими, они требуют применение других методов для определения функции в 3-4 точках. Методы требуют большего объема памяти ЭВМ в сравнении с одношаговыми методами, но позволяют легко оценить погрешность на любом шаге.

Одним из важнейших практических вопросов при составлении программы решения задачи ОДУ является выбор шага. Если шаг слишком мал, то расчет потребует больших затрат машинного времени. Если же шаг выбран слишком большим, то значительной оказывается локальная погрешность и накопившаяся суммарная ошибка может оказаться недопустимо большой. Поэтому обычно применяется коррекция шага, т.е. расчет ведется с шагом h и $h/2$, и разница результатов сравнивается с заданной погрешностью ε . В зависимости от результата сравнения дальнейшие вычисления выполняются с шагом h , если ошибка не превышает заданную погрешность, или с шагом $h/2$ - в противном случае.

Чем выше порядок точности метода, тем более точным будет полученный результат. Но это утверждение справедливо лишь до некоторой степени, так как конечно-разностные аналоги производных по мере повышения порядка аппроксимации ведут себя хуже. Обычно достигается некоторый компромисс между объемом и точностью вычисления, обычно это четвертый порядок точности.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОДУ

3.1. Сведение линейной двухточечной краевой задачи к задаче Коши

Большинство методов решения граничной задачи сводится к многократному решению задачи Коши. Рассматривается линейное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

где $h(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - непрерывные функции. Требуется найти его решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B, \\ |\alpha_0| + |\alpha_1| &\neq 0, \\ |\beta_0| + |\beta_1| &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение (3.1) ищем в виде суммы решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$y = CU + v, \quad (3.4)$$

где C - произвольная постоянная.

Потребуем, чтобы первое краевое условие (3.2) выполнялось для y при любом C . Подставим (3.4) в (3.2):

$$C[\alpha_0 U(a) + \alpha_1 U'(a)] + \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = A. \quad (3.5)$$

Чтобы равенство выполнялось при любых C , должно быть:

$$\begin{aligned} \alpha_0 U(a) + \alpha_1 U'(a) &= 0, \\ \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) &= A. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выберем

$$U(a) = \alpha_1 k; U'(a) = -\alpha_0 k, \quad (3.7)$$

где $k \neq 0$ - некоторая константа, коэффициент пропорциональности.

Тогда из второго условия (3.6) следует:

$$v(a) = \frac{A}{\alpha_0}; v'(a) = 0, \text{ если } \alpha_0 \neq 0. \quad (3.8)$$

В этом случае U является решением задачи Коши для однородного уравнения, соответствует (3.1) и удовлетворяющим начальным условиям (3.7), а v - решение неоднородного уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям (3.8).

При этом для любого C удовлетворяются для решения (3.4) краевые условия (3.2).

Составим вторую задачу Коши. Подберем C , чтобы функция u удовлетворяла краевому условию при $x = b$ (3.3). Подставим (3.4) в (3.3), получим

$$C [\beta_0 U(b) + \beta_1 U'(b)] + [\beta_0 g(b) + \beta_1 g'(b)] = B,$$

откуда:

$$C = \frac{B - [\beta_0 g(b) + \beta_1 g'(b)]}{\beta_0 U(b) + \beta_1 U'(b)}, \quad (3.9)$$

при этом предполагается, что знаменатель отличен от нуля.

Т.о., задача (3.1)(3.2) сведена к двум задачам Коши.

Из второго граничного условия по (3.9) определяется коэффициент C и подставляется в решение (3.4). Решение (3.4) может быть определено численными методами для задачи Коши.

3.2. Метод конечных разностей

В задачах ОДУ встречаются уравнения, в которых коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ заданы таблично с некоторым шагом h . Такие задачи удобно решать конечно-разностным методом. Этот метод можно применять и в других случаях.

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (3.10)$$

с двухточечными краевыми условиями

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad (3.11)$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (3.12)$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$; $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$,

функции $p(x)$, $q(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Отрезок $[a, b]$ разбиваем на n частей с шагом: $h = \frac{b-a}{n}$,

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$x_0 = a; x_n = b.$$

Введем преобразования:

$$p_i = p(x_i); q_i = q(x_i); f_i = f(x_i),$$

Заменим производные конечно-разностными отношениями:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (3.13)$$

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}. \quad (3.14)$$

Заменяем уравнение (3.10) конечно-разностным по (3.13), (3.14):

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2. \quad (3.15)$$

Краевые условия (3.11), (3.12) дают еще два уравнения:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad (3.16)$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B.$$

Получена линейная система $n + 1$ уравнений для $n + 1$ неизвестных $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$, которые и представляют таблицу значений функции y . Оценка погрешности метода имеет вид:

$$|y_i - y_i^*| \leq \frac{h^2 M_4}{96} (x_i - a)^2$$

где $M_4 = \max_{[ab]} |y^{(4)}|$;

y_i - приближенное решение;

y_i^* - точное решение в данном узле.

ПРИМЕР.

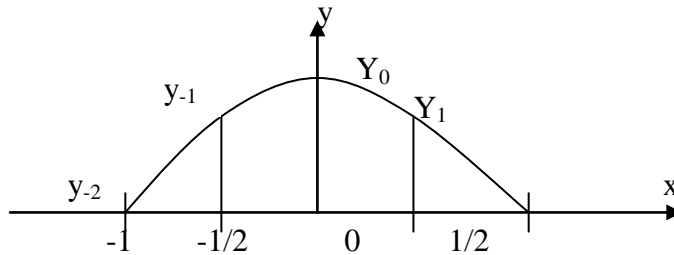
Рассмотрим дифференциальное уравнение для изгибающего момента некоторого бруса с переменным поперечным сечением и шарнирно закрепленными концами.

Пример шаг $h = 1/2$, крайвые условия $y_2 = y_{-2} = 0$; $y_{-1} = y_1$.

Дифференциальные уравнения

$$y'' + x^2 y = -1.$$

$$y(-1) = y(1) = 0.$$



Соответствующее уравнение в конечных разностях

$$\frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{1/4} + y_0 = -1,$$

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{1/4} + \left(1 + \frac{1}{4}\right)y_1 = -1,$$

После приведения подобных получим систему

$$8y_1 - 7y_0 = -1,$$

$$4y_0 - 6\frac{3}{4}y_1 = -1.$$

Решение $y_0 = 0,967$; $y_1 = 0,721$.

Достоинство конечно-разностных методов в том, что они позволяют свести решение краевой задачи к решению системы алгебраических уравнений. Если дифференциальное уравнение линейное, то система алгебраических уравнений получается также линейная, его можно решить методом Гаусса. Для нелинейного уравнения система алгебраических уравнений является нелинейной и для ее решения надо применять соответствующие методы, например метод Ньютона.

Метод конечных разностей имеет второй порядок точности, т.е. погрешность аппроксимации производных пропорциональна квадрату h .

3.3. Метод прогонки

При применении метода конечных разностей для ОДУ 2-го порядка получается трехчленная система: каждое уравнение содержит три соседних неизвестных.

Матрица системы уравнений имеет большое количество нулей, при использовании метода Гаусса необходимо в программе организовать обработку нулей.

Поэтому для решения такой системы разработан метод прогонки, в котором осуществляется работа только с ненулевыми элементами матрицы.

Рассматривается уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.17)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Функции $p(x), q(x), f(x)$ предполагаются непрерывными на $[a, b]$.

Принимаем шаг:

$$h = \frac{b-a}{n}; x_i = x_0 + ih; i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.10) заменяем уравнением в конечных разностях

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.20)$$

После приведения подобных получим

$$y_{i+2} + (2 + 2hp_i)y_{i+1} + (-hp_i + h^2q_i)y_i = f_i h^2. \quad (3.21)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} -2 + hp_i &= m_i \\ 1 - hp_i + h^2q_i &= n_i \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Получим систему:

$$y_{i+2} + m_i y_{i+1} + n_i y_i = f_i h^2, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.23)$$

Кроме этого краевые условия дают:

$$\begin{aligned} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Разрешаем (3.16) относительно y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \frac{f_i}{m_i} h^2 - \frac{n_i}{m_i} y_i - \frac{1}{m_i} y_{i+2}. \quad (3.25)$$

В методе Гаусса в каждом уравнении выполняется исключение неизвестного. При исключении y_i будем искать вид уравнения:

$$y_{i+1} = c_i d_i - y_{i+2}, \quad (3.26)$$

где c_i и d_i некоторые коэффициенты.

Получим формулы для определения этих коэффициентов.

Составим (3.25) для $i = 0$:

$$y_1 = \frac{f_0}{m_0} h^2 - \frac{n_0}{m_0} y_0 - \frac{1}{m_0} y_2. \quad (3.27)$$

Из краевого условия (3.24):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}. \quad (3.28)$$

Из (3.27) и (3.28) исключаем y_0 , получим

$$y_1 = \frac{f_0}{m_0} h^2 - \frac{n_0}{m_0} \left(\frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} \right) - \frac{1}{m_0} y_2. \quad (3.29)$$

Разрешаем (3.29) относительно y_1 , имеем

$$y_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0 (\alpha_1 - \alpha_0 h) + n_0 \alpha_1} \left(\frac{n_0 Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2 - y_2 \right). \quad (3.30)$$

Из сравнения с (3.26) получаем начальные коэффициенты

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0 (\alpha_1 - \alpha_0 h) + n_0 \alpha_1}, \quad (3.31)$$

$$d_0 = \frac{n_0 Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2.$$

Для шага i формула (3.26) имеет вид

$$y_i = c_{i-1} d_{i-1} - c_{i-1} y_{i+1}. \quad (3.32)$$

Значение y_i по (3.32) подставим в (3.25):

$$y_{i+1} = \frac{f_i}{m_i} h^2 - \frac{n_i}{m_i} (c_{i-1} d_{i-1} - c_{i-1} y_{i+1}) - \frac{1}{m_i} y_{i+2}. \quad (3.33)$$

Разрешаем (3.33) относительно y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}} (f_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+2}). \quad (3.34)$$

Из сравнения (3.34) и (3.26) получим

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad (3.35)$$

$$d_i = f_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}.$$

По формулам (3.31) сначала определяются коэффициенты c_0, d_0 , учитывающие первые граничные условия (3.18), затем по (3.35) вычисляются c_i, d_i ($i = 1, 2 \dots n-2$). Эти действия составляют прямой ход прогонки.

Получим формулы обратного хода.

Для $i = n$ составим (3.26) и выражение второго граничного условия:

$$y_{n-1} = c_{n-2} (y_{n-2} - y_n)$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B.$$

Решаем эту систему относительно y_n , получим

$$y_n = \frac{\beta_1 c_{n-2} d_{n-2} + Bh}{\beta_1 (-c_{n-2}) + \beta_0 h}. \quad (3.36)$$

По формулам (3.26) идет обратный ход:

$$y_{n-1} = c_{n-2} (y_{n-2} - y_n)$$

$$y_{n-2} = c_{n-3} (y_{n-3} - y_{n-1})$$

$$\dots$$

$$y_1 = c_0 (y_0 - y_2) \quad (3.37)$$

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}. \quad (3.38)$$

Все вычисления прогонки выполняются два раза, по возрастанию индекса i вычисляются вспомогательные коэффициенты c_i, d_i , причем для вычисления c_0, d_0 используется первое граничное условие. На первом шаге обратного хода происходит согласование со вторым граничным условием, после чего вычисляется таблица решений y_i в обратном порядке индекса i .

Для оценки погрешности производят двойной просчет при шаге h и шаге $h/2$ и сравнивают их.

По методу Рунге

$$|y_i(h) - y_i^*| \leq \frac{1}{3} \left| y_i\left(\frac{h}{3}\right) - y_i(h) \right|, \quad (3.39)$$

где $y_i(h)$ - решение методом прогонки с шагом h ;

$y_i(h/2)$ - решение с шагом $h/2$;

y_i^* - точное решение.

Подбором шага можно добиться заданной точности решения.

Метод прогонки устойчив к ошибкам вычисления. Погрешность метода определяется погрешностью замены дифференциальных уравнений конечно-разностными и погрешностью вычислений в процессе прогонки.

Существуют теоремы [2], доказывающие устойчивость метода при $|c_i| < 1$, тогда ошибки при вычислениях не возрастают. Общая структура трехдиагональной системы

$$A_i y_{i-1} - \bar{c}_i y_i + B_i y_{i+1} = 2i.$$

Существует теорема [2], что прогонка осуществима и устойчива, если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} A_i &> 0, \\ B_i &> 0, \\ \bar{C}_i &\geq A_i + B_i. \end{aligned}$$

3.4. Метод стрельбы для решения краевых задач

Метод стрельбы заключается в решении краевой задачи путем решения ряда задач Коши.

В качестве аналога рассмотрим стрельбу по заданной цели. Для начала выбирается произвольный угол α_1 , снаряд вообще не попадает в заданную точку В. Выбирая различные углы α , создающие "вилку" для цели В, можно найти такое значение α , что цель будет поражена с заданной точностью.

Метод решения краевых задач путем сведения их к задаче Коши с последующим поиском начальных условий, чтобы удовлетворялись оба граничных условия двухточечной задачи, называется методом стрельбы.

Рассмотрим один из вариантов этого класса методов.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(x)}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2(x)}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Определяются решения на интервале $[x_0, x_n]$ удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0)) &= 0, \\ \psi(x_n, y_1(x_n), y_2(x_n)) &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

Где φ и ψ - некоторые нелинейные функции.

Положим $y_1(x_0) = L$, где L некоторое произвольное число (аналогично выборку начального угла α полета снаряда).

Подставим в 1-е граничное условие (3.41):

$$\varphi(x_0, L, y_2(x_0)) = 0. \quad (3.42)$$

Решаем это уравнение одним из численных методов решения нелинейного алгебраического уравнения относительно $y_2(x_0)$.

Если граничные условия (3.41) линейные, то процесс решения (3.42) значительно упрощается:

$$y_2(x_0) = B.$$

Получили задачу Коши решения (3.40) при заданных начальных условиях

$$y_1(x_0) = L; y_2(x_0) = B. \quad (3.43)$$

Применим один из методов решения задачи Коши, например метод Рунге-Кутты. В результате можно определить значения функций в конце заданного отрезка аргумента

$$y_1(x_n, L); y_2(x_n, L) \quad (3.44)$$

Подставим (3.44) во второе граничное условие (3.41) получим:

$$\psi(x_n, y_1(x_n, L), y_2(x_n, L)) = 0. \quad (3.45)$$

Оно может быть выполнено, в этом случае граничная задача решена. Но в общем случае (3.45) не выполняется, его можно рассматривать как уравнение относительно L , что позволяет уточнить выбранное значение L .

Для решения уравнения (3.45) применяем метод секущих

$$L_{j+1} = L_j - \frac{L_j - L_{j-1}}{\frac{\psi(L_j) - \psi(L_{j-1})}{\psi(L_j)}} \cdot \psi(L_j) \quad (3.46)$$

Где j - номер итерации.

Определяются новые значения L , вновь повторяется процесс формирования и решения задачи Коши (3.40) (3.43).

Процесс повторяется, пока не получим неравенства

$$|\psi(L_n, y_1, L_n) - \psi(L_n, y_2, L_n)| < \varepsilon \quad (3.47)$$

где ε - заданная точность.

В формуле (3.46) требуются 2 значения L , в начальный момент они могут быть взяты произвольными.

Метод можно распространить на произвольную систему дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейную систему в матричной форме

$$\frac{dy}{dx} = A(x)Y + f, \quad (3.48)$$

где Y - вектор решений;

$A(x)$ - матрица $n \times n$;

f - вектор правых частей.

Граничные условия:

$$GY(a) + DY(b) = c. \quad (3.49)$$

В методе стрельбы задаются начальным приближением вектора

$$Y^0 = Y^0. \quad (3.50)$$

Далее решают задачу Коши (3.48) (3.50) численным методом (например, методом Рунге-Кутты) на интервале $[a, b]$.

Получив таблицу решений, определяют вектор

$$Y^0. \quad (3.51)$$

Вычисляют вектор невязки краевых условий, подставляя (3.50) и (3.51) в (3.49):

$$\tau^0 = GY^0 + DY^0 - c. \quad (3.52)$$

Вычисляется норма этого вектора

$$S = \|\tau^0\|. \quad (3.53)$$

Если $S = 0$, то краевая задача решена, если нет, то выбирается новое значение Y^0 из условия минимизации (3.53).

4. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДУ

4.1. Проекционные методы решения задач ОДУ

Рассмотренные ранее численные методы позволяют получить для решения краевой задачи ОДУ таблицу значений искомой функции.

По такой таблице не всегда видно поведение функции при изменении параметров дифференциального уравнения.

Существуют аналитические приближенные методы, позволяющие получить решение в виде некоторой функции, которая с некоторой точностью отражает решение краевой задачи и позволяет проанализировать поведение решения с изменением параметров.

Среди таких методов наиболее удачными для программирования являются проекционные.

Рассматривается общая краевая задача ОДУ:

$$L \bar{y} = f(x); x \in \Omega. \quad (4.1)$$

$$\Gamma_\alpha \bar{y} = A, \quad (4.2)$$

$$\Gamma_\beta \bar{y} = B, \quad (4.3)$$

где L - дифференциальный оператор задачи ОДУ;

$\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ - операторы краевых условий.

Приближенное решение ищем в виде линейной комбинации базисных функций

$$y(x) \approx \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x), \quad (4.4)$$

Базисные функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условию линейной независимости и являются частью полной системы функций.

В качестве близости решения (4.4) к точному используется невязка:

$$\varepsilon(x) = L y(x) - f(x) \quad (4.5)$$

В зависимости выбора базисных функций и способа вычисления коэффициентов α_k по невязке (4.5) различаются разные методы. В проекционных методах задается векторное пространство V , порождаемое линейными комбинациями φ_k , и скалярное произведение в этом пространстве:

$$(U, W) = \int_a^b U(x) W(x) dx. \quad (4.6)$$

Такие методы связаны с использованием скалярного произведения (4.6) для определения коэффициентов α_k .

1. Метод коллокации - в точках отрезка $[a, b]$ полагается невязка равной нулю, из этого условия определяются α_k .

2. Метод Галеркина - из условия ортогональности невязки и первых n базисных функций

$$\langle \epsilon, \varphi_i \rangle = 0 \quad (4.7)$$

определяются α_k .

3. Метод наименьших квадратов:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \langle \epsilon, \epsilon \rangle = 0 \quad (4.8)$$

из этого условия определяются коэффициенты α_k .

4. Метод моментов - ортогональность невязки и первых функций $y^0, y^1 \dots$ дает:

$$\langle \epsilon, y^{(k)} \rangle = 0, \quad (4.9)$$

что и является уравнениями для определения α_k .

Все эти методы связаны с минимизацией некоторого функционала, поэтому относятся к классу вариационных методов.

4.2. Метод коллокации

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4.10)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha[y] &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \Gamma_\beta[y] &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \\ |\alpha_0| + |\alpha_1| &\neq 0; |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выбираем линейно-независимую систему базисных функций $U_0(x), \dots, U_n(x)$.

Если $A=B=0$, то можем положить начальную базисную функцию $U_0(x) \equiv 0$.

Решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций

$$y = U_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i U_i(x), \quad (4.12)$$

где $U_0(x)$ должно удовлетворять условию:

$$\Gamma_\alpha[U_0] = A; \Gamma_\beta[U_0] = B, \quad (4.13)$$

остальные функции удовлетворяют условию:

$$\Gamma_\alpha[U_i] = 0; \Gamma_\beta[U_i] = 0. \quad (4.14)$$

При таком выборе базисных функций краевые условия (4.11) будут выполняться для приближенного решения (4.12). Подставим решение (4.12) в уравнение (4.10), получим невязку:

$$R = L[y] - f(x) = L[U_0] - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[U_i]. \quad (4.15)$$

Подбираем c_i такими, чтобы невязка (4.15) была минимальной. Если $R(x_1, c_1, \dots, c_n) \equiv 0$, то решение (4.12) будет точным.

Потребуем, чтобы R обращалась в нуль в определенных выбранных точках отрезка $[a, b]$, x_1, x_2, \dots, x_n - точка коллокации.

Этот прием - аналог интерполяции функции R по Лагранжу.

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} R(x_1, c_1, c_2, \dots, c_n) &\equiv 0, \\ R(x_2, c_1, c_2, \dots, c_n) &\equiv 0, \\ &\dots \\ R(x_n, c_1, c_2, \dots, c_n) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из этой системы определяются коэффициенты c_i .

При использовании метода коллокации количество точек коллокации выбирается столько, сколько взято базисных функций в решении (4.12). От выбора точек зависит сходимость метода. От неудачного выбора точек коллокации может возникнуть неустойчивость вычислительного процесса.

ПРИМЕР

Методом коллокации найти приближенное решение

$$y'' + (x^2)y + 1 = 0,$$

$$y(1) = y(0) = 0.$$

В качестве базисных функций выбираем

$$U_0(x) = 0; U_1(x) = 1 - x^2; U_2(x) = x^2(1 - x^2).$$

Вообще: $U_n(x) = x^{2n-2}(1 - x^2)$.

Приближенное решение

$$U = c_1(1 - x^2) + c_2x^2(1 - x^2).$$

Краевые условия при этом удовлетворяются.

Поскольку базисных функций две, то выбираем две точки коллокации $x_0 = 0; x_1 = 1/2$.

Составим невязку

$$R(x) = 1 - c_1(1 + x^4) + c_2(-11x^2 - x^6).$$

Подставим в невязку точки коллокации:

$$1 - c_1 + 2c_2 = 0,$$

$$1 - \frac{17}{16}c_1 - \frac{49}{64}c_2 = 0,$$

Решаем систему уравнений: $c_1 = 0,957; c_2 = -0,022$.

Тогда приближенное решение

$$y = 0,957(1 - x^2) - 0,022x^2(1 - x^2).$$

4.3. Метод Галеркина

Метод Галеркина основан на теореме из теории общих рядов Фурье.

ТЕОРЕМА.

Пусть $\{U_n(x)\}$ - полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна на отрезке $[a, b]$ ко всем функциям $U_n(x)$, т.е.

$$\int_a^b f(x) U_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.17)$$

то $f(x) \equiv 0$ при $a \leq x \leq b$.

Доказательство.

Рассмотрим разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x) \quad (4.18)$$

Коэффициенты разложения определяются

$$c_n = \frac{1}{\|U_n\|^2} \int_a^b f(x) U_n(x) dx, \quad (4.19)$$

где $\|U_n\|^2 = \int_a^b U_n^2(x) dx > 0$, предполагается гильбертово пространство.

Тогда по условию (4.17) $c_n = 0$, а следовательно, и $f(x) \equiv 0$.

Система $\{U_n(x)\}$ предполагается полной, тогда выполняется равенство полноты по отношению к функции $f(x)$

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n\|^2 c_n^2. \quad (4.20)$$

Но т.к. $c_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$, то

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

И, следовательно, $f(x) \equiv 0$ при $a \leq x \leq b$.

Рассмотрим метод Галеркина.

Имеем краевую задачу

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha \left[y \right] &= \alpha_0 y \left[\right] + \alpha_1 y' \left[\right] = A, \\ \Gamma_\beta \left[y \right] &= \beta_0 y \left[\right] + \beta_1 y' \left[\right] = B, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Выбираем систему базисных функций $\{U_n \left[\right] \left(n = 0, 1, \dots, n \right)$, представляющую часть полной системы. $U_0 \left[\right]$ должно удовлетворять граничным условиям (4.22):

$$\Gamma_\alpha \left[U_0 \right] = A; \Gamma_\beta \left[U_0 \right] = B, \quad (4.23)$$

а остальные функции - нулевым условиям

$$\Gamma_\alpha \left[U_i \right] = 0; \Gamma_\beta \left[U_i \right] = 0; \left(i = 1, 2, \dots, n \right). \quad (4.24)$$

Решение краевой задачи ищем в виде:

$$y = U_0 \left[\right] + \sum_{i=1}^n c_i U_i \left[\right]. \quad (4.25)$$

Определим невязку, подставив (4.25) в (4.21):

$$R = L \left[U_0 \right] + \sum_{i=1}^n c_i L \left[U_i \right] - f \left[\right]. \quad (4.26)$$

Для точного решения $R \equiv 0$, для приближенного решения выбираем c_i , чтобы невязка была ортогональна к базисным функциям, тогда по доказанной теореме невязка будет мала тем более, чем больше n .

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \int_a^b U_1 \left[\right] R dx &= 0, \\ \int_a^b U_2 \left[\right] R dx &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \int_a^b U_n \left[\right] R dx &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Или

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b U_i \left[\right] L \left[U_i \right] dx &= \int_a^b U_i \left[\right] \left(L \left[U_0 \right] - f \left[\right] \right) dx, \\ \left(i = 1, 2, \dots, n \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Решая систему (4.28) после вычисления интегралов получим коэффициенты c_i для решения (4.25).

ПРИМЕР

Решить методом Галеркина

$$y'' + xy' + y = 2x,$$

$$y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

Система базисных функций:

$$U_0 = 1 - x,$$

$$U_1 = x(1 - x),$$

$$U_2 = x^2(1 - x),$$

$$U_3 = x^3(1 - x).$$

Приближенное решение:

$$y = (1 - x) + c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x) + c_3 x^3(1 - x).$$

Определяем невязку

$$R = (-4x) + c_1(2 + 2x - 3x^2) + c_2(-6x + 3x^2 - 4x^3) + c_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4).$$

Составляем условия ортогональности

$$\int_0^1 (-x^2) R dx = 0;$$

$$\int_0^1 (-x^3) R dx = 0;$$

$$\int_0^1 (-x^4) R dx = 0.$$

После подстановки невязки и интегрировании получим систему

$$133c_1 + 63c_2 + 36c_3 = -70,$$

$$140c_1 + 108c_2 + 79c_3 = -98,$$

$$264c_1 + 252c_2 + 211c_3 = -210.$$

Решение системы

$$c_1 = -0,2090; c_2 = -0,7894; c_3 = 0,2090.$$

Приближенное решение дифференциального уравнения

$$y = (1 - x)(-0,2090x - 0,7894x^2 + 0,2090x^3).$$

4.4. Метод наименьших квадратов

Рассматривается краевая задача

$$L \bar{y} = f(x). \quad (4.29)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha \bar{y} &= A, \\ \Gamma_\beta \bar{y} &= B. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Решение определяем также в виде линейной комбинации базисных функций:

$$y = U_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i U_i(x) \quad (4.31)$$

где U_i обладают свойствами

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha U_i &= \begin{cases} A, & i = 0 \\ 0, & i > 0, \end{cases} \\ \Gamma_\beta U_i &= \begin{cases} B, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Определяется невязка

$$R(c_1, \dots, c_n) = L \bar{y} - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i L U_i. \quad (4.33)$$

Далее составляем функционал, минимизирующий невязку:

$$I = \int_a^b R^2(c_1, \dots, c_n) dx \rightarrow \min. \quad (4.34)$$

Условия минимизации функционала

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_1} &= \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_1} dx = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_2} &= \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_2} dx = 0, \\ &\dots\dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_n} &= \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_n} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Решив систему (4.35), получим коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n , подстановка которых в (4.31) дает приближенное решение дифференциального уравнения.

Можно пользоваться точечным методом наименьших квадратов, в этом случае функционал представлен суммой:

$$I_n = \sum_{i=1}^n R^2(c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (4.36)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n - система точек отрезка $[a, b]$, обычно это равноотстоящие точки, причем $N > n$. Если $N = n$, то параметры c_i получаются из системы

$$R(c_i, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

т.е. метод переходит в метод коллокации.

ПРИМЕР

Найти приближенное решение уравнения методом наименьших квадратов

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0.$$

При граничных условиях $y(0) = 0; y(1) = 0$.

Решение.

Выбираем узлы: $x_0 = 0; x_{\pm 1} = \pm 1/4; x_{\pm 2} = \pm 1/2; x_{\pm 3} = \pm 3/4$.

Ввиду симметрии задачи за основной промежуток выбираем $[0, 1]$, т.е. узлы $x_0; x_1; x_2; x_3$.

Базисные функции: $U_1 = (1 - x^2); U_2 = x^2(1 - x^2)$.

Приближенное решение

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2 x^2(1 - x^2).$$

После подстановки в уравнение получаем невязку

$$R = 1 + \alpha_i c_1 + \beta_i c_2,$$

где

$$\alpha_i = -(1 + x_i^4);$$

$$\beta_i = 2 - 11x_i^2 - x_i^6, \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

Система уравнений для определения коэффициентов:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_1} = \sum_{i=0}^3 \alpha_i + c_1 \sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^3 \alpha_i \beta_i = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_2} = \sum_{i=0}^3 \beta_i + c_1 \sum_{i=0}^3 \alpha_i \beta_i + c_2 \sum_{i=0}^3 \beta_i^2 = 0.$$

Подстановка значений β_i и α_i дает систему

$$4,8696c_1 + 3,2425c_2 = 4,3828,$$

$$3,2425c_1 + 25,3659c_2 = 1,8188,$$

Решение системы: $c_1 = 0,9317; c_2 = 0,0474$.

Приближенное решение дифференциального уравнения:

$$y = 0,9317(1 - x^2) + 0,0474 x^2(1 - x^2).$$

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОДУ

5.1. Метод Чаплыгина

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad (5.1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (5.2)$$

Правая часть уравнения непрерывна и ограничена на заданном отрезке и имеет производные $f'(x, y)$ и $f''(x, y)$. В этом методе искомое решение $y(x)$ ($x_0 \leq x \leq \bar{x}$) аппроксимируется двумя последовательностями функций

$$\begin{aligned} U_n &= U_n(x), \\ \mathcal{G}_n &= \mathcal{G}_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

удовлетворяющими неравенству

$$U_n(x) \leq y(x) \leq \mathcal{G}_n(x), \quad x \in [x_0, \bar{x}] \quad (5.4)$$

и начальным условиям

$$U_n(x_0) = \mathcal{G}_n(x_0) = y_0 \quad (5.5)$$

Т.е. решение $y(x)$ заключено между функциями $y = \mathcal{G}_n(x)$ и $y = U_n(x)$.

Лемма Чаплыгина о неравенствах.

Пусть $I[u] = z' - f(x, z)$ дифференциальный оператор, соответствующий дифференциальному уравнению (5.1); $y = y(x)$ - интеграл уравнения (5.1), удовлетворяющий условию (5.2).

Если функция $U = U(x)$ удовлетворяет условию

$$I[U] \leq 0 \text{ при } x_0 \leq x \leq \bar{x} \text{ и } U(x_0) = y_0, \quad (5.6)$$

то на отрезке $[x_0, \bar{x}]$ выполняется неравенство

$$U \leq y. \quad (5.7)$$

Аналогично, если для $\mathcal{G}(x)$ выполняется условие

$$I[\mathcal{G}] \geq 0 \text{ при } x_0 \leq x \leq \bar{x} \text{ и } \mathcal{G}(x_0) = y_0, \quad (5.8)$$

то на отрезке $[x_0, \bar{x}]$ имеет место

$$\mathcal{G} \leq y. \quad (5.9)$$

Доказательство.

Докажем предложение о нижней границе. Из (5.1) и (5.6) следует:

$$\begin{aligned} y' - f(x, y) &\geq 0, \\ U' - f(x, U) &\leq 0, \end{aligned}$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$(y' - U') - (f(x, y) - f(x, U)) \geq 0. \quad (5.10)$$

Второе слагаемое умножим и разделим на $(y - U)$, получим:

$$(y' - U') - p(x)(y - U) \geq 0 \quad (5.11)$$

где

$$p(x) = \frac{f(x, y) - f(x, U)}{y - U} \quad (5.12)$$

Если $U = y$, то функция $p(x)$ теряет смысл, поэтому определим ее:

$$p(x) = \lim_{U \rightarrow y} \frac{f(x, y) - f(x, U)}{y - U} = f'_y(x, y). \quad (5.13)$$

Теперь функция p определена везде. Если в (5.11) было бы равенство, то это было бы линейное дифференциальное уравнение.

Умножим (1.11) на интегрирующий множитель для такого уравнения

$$M(x) = e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} > 0 \quad (5.14)$$

И свернем полученное выражение:

$$\frac{d}{dx} (M(x)(y(x) - U(x))) \geq 0. \quad (5.15)$$

Интегрируем в пределах $[x_0, x]$:

$$M(x)(y(x) - U(x)) - M(x_0)(y(x_0) - U(x_0)) \geq 0. \quad (5.16)$$

Последняя скобка обращается в нуль по (1.6), тогда:

$$M(x)(y(x) - U(x)) \geq 0. \quad (5.17)$$

Поскольку $M(x) > 0$, тогда

$$U(x) \leq y(x),$$

что доказывает (5.7).

Аналогично доказательство для верхней границы. Лемма устанавливает существование граничной последовательности кривых, но не указывает способ их построения.

Рассмотрим метод построения таких последовательностей. Выбираем начальные приближения функций

$$U_0 = U_0(\xi); \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0(\xi), \quad (5.18)$$

так что $U_0 \leq \mathcal{G}_0$ и выполняются неравенства:

$$I \left[\bar{V}_0 = -\varphi_0(\xi) \geq 0; I \left[\bar{P}_0 = \psi_0(\xi) \geq 0. \right. \right. \quad (5.19)$$

Такие функции можно построить следующим образом. Обозначим:

$$m = \min_y f(\xi, y); M = \max_y f(\xi, y), \quad (5.20)$$

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{|m|}, \frac{b}{|M|} \right\}. \quad (5.21)$$

Тогда на отрезке $[\xi, \bar{x}]$, где $\bar{x} = x_0 + h$, за начальные приближения можно взять

$$\begin{aligned} U_0 &= y_0 + m(\xi - x_0), \\ \mathcal{G}_0 &= y_0 + M(\xi - x_0), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_0}{dx} &= m, \\ \frac{d\mathcal{G}_0}{dx} &= M. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Они удовлетворяют начальным условиям и условиям

$$\left. \begin{aligned} I \left[\bar{V}_0 = m - f(\xi, U_0) \geq 0 \right] \\ I \left[\bar{P}_0 = M - f(\xi, \mathcal{G}_0) \geq 0 \right] \end{aligned} \right\}. \quad (5.24)$$

Далее строится итерационный процесс приближения к u сверху и снизу

$$U_1 = U_0 + \rho_0; \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 - \delta_0. \quad (5.25)$$

Итерационные поправки ρ_0, δ_0 определяются решением дифференциальных уравнений

$$\frac{d\rho_0}{dx} = p_0(\xi) \rho_0 + \varphi_0(\xi), \quad (5.26)$$

$$\frac{d\delta_0}{dx} = q_0(\xi) \delta_0 + \psi_0(\xi),$$

$$\rho_0(\xi) = 0; \delta_0(\xi) = 0. \quad (5.27)$$

где φ_0 и ψ_0 определены в (5.19). Коэффициенты уравнения (5.26) определяются

$$p_0(\xi) = f'_y(\xi, U_0), \quad (5.28)$$

$$q_0(\xi) = \frac{f(\xi, \mathcal{G}_0) - f(\xi, U_0)}{\mathcal{G}_0 U_0}, \quad (5.29)$$

тогда $\rho_0 \geq 0; \delta_0(\xi) \geq 0$.

Докажем, что первые приближения U_1 и \mathcal{G}_1 удовлетворяют лемме Чаплыгина.

Подставим U_1 в дифференциальный оператор:

$$I \mathbb{V}_1 \bar{\equiv} U_0' + \rho_0' - f \mathbb{C}, U_0 + \rho_0 \bar{\succ}. \quad (5.30)$$

Заменим ρ_0' по (5.26), U_0' по (5.19), получим

$$I \mathbb{V}_1 \bar{\equiv} f \mathbb{C}, U_0 \bar{\succ} - \varphi_0 \mathbb{C} \bar{\succ} + p_0 \mathbb{C} \bar{\succ} \rho_0 + \varphi_0 \mathbb{C} \bar{\succ} - f \mathbb{C}, U_0 + \rho_0 \bar{\succ}.$$

Заменяем $p_0 \mathbb{C} \bar{\succ}$ по (5.28):

$$I \mathbb{V}_1 \bar{\equiv} \rho f_y' \mathbb{C}, \varphi_0 \bar{\succ} - f \mathbb{C}, U_0 + \rho_0 \bar{\succ} - f \mathbb{C}, U_0 \bar{\succ}. \quad (5.31)$$

Последнюю скобку разложим по формуле Тейлора, считая ρ_0 как приращение:

$$f \mathbb{C}, U_0 + \rho_0 \bar{\succ} - f \mathbb{C}, U_0 \bar{\succ} = \rho_0 f_y' \mathbb{C}, U_0 \bar{\succ} + \frac{\rho_0^2}{2} f_{yy}'' \mathbb{C}, U_0 + \theta \rho_0 \bar{\succ}, \quad (5.32)$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

Подставим (5.32) в (5.31), имеем:

$$I \mathbb{V}_1 \bar{\equiv} -\frac{\rho_0^2}{2} f_{yy}'' \mathbb{C}, U_0 + \theta \rho_0 \bar{\succ} \geq 0, \quad (5.33)$$

т.е. выполнено условие леммы (5.6)

Аналогично доказывается, что $I \mathbb{P}_1 \bar{\geq} 0$. Отсюда следует результат леммы

$$U_1 \leq y \leq \mathcal{G}_1.$$

Таким образом, можно построить последовательно ограничивающую решение y

$$U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots U_{n+1} \leq y \leq \mathcal{G}_{n+1} \leq \dots \leq \mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_0, \quad (5.34)$$

где для n -го шага:

$$I \mathbb{V}_n \bar{\equiv} -\varphi_n \mathbb{C} \bar{\geq} 0; I \mathbb{P}_n \bar{\equiv} \psi_n \mathbb{C} \bar{\geq} 0 \quad (5.35)$$

итерационный процесс

$$U_{n+1} = U_n + \rho_n; \mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n - \delta_n, \quad (5.36)$$

где итерационные поправки являются решениями уравнений:

$$\frac{d\rho_n}{dx} = p_n \mathbb{C} \bar{\succ} \rho_n + \varphi_n \mathbb{C} \bar{\succ} \quad (5.37)$$

$$\frac{d\delta_n}{dx} = q_n \mathbb{C} \bar{\succ} \delta_n + \psi_n \mathbb{C} \bar{\succ}$$

$$\rho_n \mathbb{C}_0 \bar{\geq} 0; \delta_n \mathbb{C}_0 \bar{\geq} 0. \quad (5.38)$$

Коэффициенты системы (5.37) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} p_n(x) &\equiv f'_y(x, U_n), \\ q_n(x) &\equiv \frac{f(x, g_n) - f(x, U_n)}{g_n - U_n}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

Уравнения системы (5.37) линейные, их частные решения:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \ell^{x_0} \int_{x_0}^x q_n(x) dx - \int_{x_0}^x p_n(x) dx, \\ \delta_n &= \ell^{x_0} \int_{x_0}^x q_n(x) dx + \int_{x_0}^x p_n(x) dx. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Можно доказать [1], что при $n \rightarrow \infty$ разность $g_n - U_n$ быстро стремится к нулю. Если ε задается предельная погрешность, то приближенно можно положить

$$y(x) \approx \frac{1}{2} (U_n + g_n). \quad (5.41)$$

Недостатком метода Чаплыгина является появление не берущихся квадратур, тогда интегралы вычисляются численными методами.

5.2. Метод малого параметра Пуанкаре

В ряде нелинейных задач механики и физики приходится сталкиваться с дифференциальными уравнениями, содержащими некоторый параметр. Иногда удается найти точное решение уравнения при частном значении параметра. Тогда пытаются найти решение при близком значении параметра.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= F_1(x, y, z, \lambda) \\ \frac{dz}{dx} &= F_2(x, y, z, \lambda)\end{aligned}\tag{5.42}$$

где λ - некоторый параметр.

Начальные условия:

$$y(x_0) = y_0; z(x_0) = z_0.\tag{5.43}$$

Положим, что при $\lambda = \lambda_0$ найдено частное решение

$$\begin{aligned}Y &= \varphi(x) \\ Z &= \psi(x)\end{aligned}\tag{5.44}$$

Вводим новые переменные для $\mu = \lambda - \lambda_0$, представляющие отклонения в решениях при новом параметре λ :

$$\begin{aligned}y &= Y + \varphi(x, \mu) \\ z &= Z + \psi(x, \mu)\end{aligned}\tag{5.45}$$

Подставим в систему

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} &= F_1(x, Y + \varphi(x, \mu), Z + \psi(x, \mu), \mu + \lambda_0) \\ \frac{dz}{dx} + \frac{d\psi}{dx} &= F_2(x, Y + \varphi(x, \mu), Z + \psi(x, \mu), \mu + \lambda_0)\end{aligned}\tag{5.46}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}F_1 - \frac{d\varphi}{dx} &= f_1, \\ F_2 - \frac{d\psi}{dx} &= f_2.\end{aligned}\tag{5.47}$$

Тогда (5.46) примет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z, \mu) \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z, \mu)\end{aligned}\tag{5.48}$$

при начальных условиях

$$y|_{\epsilon_0} = 0; z|_{\epsilon_0} = 0. \quad (5.49)$$

При $\mu = 0$ тривиальное решение $y \equiv 0; z \equiv 0$.

Считаем, что f_y и f_z аналитические функции, т.е. их можно разложить в ряд:

$$\begin{aligned} f_1(\epsilon, y, z, \mu) &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} y^i z^j \mu^k, \\ f_2(\epsilon, y, z, \mu) &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk} y^i z^j \mu^k. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Решение (5.48) удовлетворяющее (5.49), ищем в виде рядов разложения по степеням малого параметра μ :

$$\begin{aligned} y(\epsilon) &= \mu y_1(\epsilon) + \mu^2 y_2(\epsilon) + \dots + \mu^n y_n(\epsilon), \\ z(\epsilon) &= \mu z_1(\epsilon) + \mu^2 z_2(\epsilon) + \dots + \mu^n z_n(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Подставляем решение (5.51) в (5.48) с учетом разложения правых частей (5.50) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ в правой и левой частях, получаем системы линейных уравнений; первая из них имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{100} y_1 + a_{010} z_1 + a_{001}, \\ \frac{dz_1}{dx} &= b_{100} y_1 + b_{010} z_1 + b_{001}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Решаем систему при начальных условиях:

$$y_1|_{\epsilon_0} = z_1|_{\epsilon_0} = 0. \quad (5.53)$$

После приравнивания коэффициентов при μ^2 имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= a_{100} y_2 + a_{010} z_2 + (a_{002} + a_{200} y_1^2 + a_{020} z_1^2 + a_{110} y_1 z_1 + a_{101} y_1 + a_{011} z_1), \\ \frac{dz_2}{dx} &= b_{100} y_2 + b_{010} z_2 + (b_{002} + b_{200} y_1^2 + b_{020} z_1^2 + b_{110} y_1 z_1 + b_{101} y_1 + b_{011} z_1). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Последние слагаемые, выделенные в скобках, вычисляются после первого шага, т.е. решения системы (5.52) (5.53). Решается подобная линейная система

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= a_{100} y_2 + a_{010} z_2 + U_2(\epsilon), \\ \frac{dz_2}{dx} &= b_{100} y_2 + b_{010} z_2 + \mathcal{G}_2(\epsilon), \end{aligned} \quad (5.55)$$

при начальных условиях

$$y_2|_{\epsilon_0} = z_2|_{\epsilon_0} = 0, \quad (5.56)$$

а функции $U_2(\xi)$ и $\mathcal{G}_2(\xi)$ определены на предыдущем шаге. Аналогично и для последующих шагов. Пуанкаре доказана теорема сходимости рядов (5.51) при достаточно малом параметре μ . Иногда само уравнение не содержит параметра, но его вставляют искусственно, так, чтобы при нулевом его значении решение получалось просто.

ПРИМЕР

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + m^2 y = f(\xi) y. \quad (5.57)$$

Вводим искусственно малый параметр ε :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + m^2 y = \varepsilon f(\xi) y. \quad (5.58)$$

При $\varepsilon = 1$ уравнение (5.58) переходит в (5.57).

Решение по методу Пуанкаре строим:

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \quad (5.59)$$

Подставляем в дифференциальное уравнение (5.58) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε в краевой и левой части.

Для ε^0 получим:

$$y_0'' + m^2 y_0 = 0. \quad (5.60)$$

Его решение известно

$$y_0 = A \cos mx + B \sin mx. \quad (5.61)$$

Аналогично на n -о шаге:

$$y_n'' + m^2 y_n = f(\xi) y_{n-1}. \quad (5.62)$$

Таким образом, с помощью квадратур находится последовательность $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$. Для (5.62) можно применить формулу

$$y_n = \frac{1}{m} \int_0^x f(\xi) y_{n-1}(\xi) \sin m(x-t) dt. \quad (5.63)$$

Чтобы получить решение уравнения (5.57), надо положить в (5.59) $\varepsilon = 1$. Предварительно надо убедиться, что ряд (5.59) сходится при $\varepsilon = 1$. Фактически используются не полные ряды типа (5.59), а лишь их отрезки, поэтому требуется оценка отброшенных членов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Численные методы анализа. М.: Наука, 1963. - 100 с.
2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. М.: Высшая школа, 1990. - 400 с.
3. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. М.: Наука, 1987. - 240 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, II, М.: Физматгиз, 1962. - 640 с.
5. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. - 576 с.
6. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП "РАСКО", 1992. - 270 с.

Лебедев Альберт Георгиевич

ЛЕКЦИИ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов направления «Информатика и вычислительная техника»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 21.01.16. Формат 60x84 /16.
Усл. печ. л. 3,25. Тираж 30 экз. Заказ 161177. Рег. № 112.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.